Dalla matematica finanziaria alla finanza matematica[1]

Piera Mazzoleni

Istituto di Econometria e Matematica per le Applicazioni economiche, finanziarie, attuariali – Università Cattolica in Milano
Largo Gemelli 1, 20123 Milano, Italy
piera.mazzoleni@unicatt.it
http://www.unicatt.it/

Sintesi. La matematica finanziaria classica fondava le sue analisi ed i suoi sviluppi sul ruolo del tempo nell'attribuzione di un valore alle operazioni finanziarie e sull'equità di contratti tra operatori. Incertezza e mercato sono i due elementi innovativi che segnano il passaggio alla finanza matematica. La teoria del portafoglio si basa sul principio media-varianza, dunque solo sui primi due momenti e sottintende che la distribuzione di probabilità sia quella normale e che la misura del rischio sia semplicemente la volatilità. Si parte allora con il prendere in esame quali proprietà della distribuzione normale debbano essere conservate rispetto alle applicazioni alla teoria del portafoglio, e si passa alla famiglia delle distribuzioni alfa-stabili. Si analizzano le condizioni minimali che deve verificare una misura di rischio e si considera la famiglia delle misure coerenti, rispetto alla quale si può ancora determinare la frontiera efficiente. Il coefficiente di correlazione deve inoltre essere sostituito da più sofisticate misure di dipendenza. Ma le teorie del portafoglio e dei mercati efficienti si basano sulle ipotesi di mercato completo e perfetto e sul principio di assenza di opportunità di arbitraggio. Rilevato come l'introduzione di incompletezza, asimmetria e sviluppo temporale consentano ancora di dare una formulazione al principio di non arbitraggio, si mostra come già dagli albori di questa disciplina ci si sia resi conto che l'informazione non è simmetrica, che sono presenti costi di transazione. Così si percorre parte dello sviluppo che ha avuto la teoria fino a risultati più recenti, che combinano sia titoli azionari sia derivati.
Parole chiave: teoria del portafoglio, principio di non arbitraggio, opzioni.

M.S.C. CLASSIFICATION: L49.
J.E.L. CLASSIFICATION: C6, G1.

1 Premessa

Nata con una impostazione computistica, in una visione limitata e circoscritta al calcolo di importi, tassi, scadenze, in base alle clausole fissate per lo

[1] Parzialmente finanziato dal Ministero per l'Università e la Ricerca Scientifica.

svolgimento di operazioni elementari, la Matematica finanziaria ha poi trovato una sistemazione assiomatica, volta a caratterizzare scambi tra importi diversi in epoche diverse, in condizioni di certezza.

Nell'approccio classico ci si limita a fissare condizioni di equità dei contratti, nello scambio tra operatori diversi con operazioni di costituzione di capitale o rendita ed ammortamento di prestiti.

L'approccio più moderno si propone di stabilire strumenti per valutare la vantaggiosità intrinseca nella relazione tra costi e ricavi e nel confronto tra progetti. Restano la limitatezza della scelta di tassi di attualizzazione generalmente costanti nel tempo e l'assenza di qualsiasi tentativo di ottimizzare le scelte mediante opportune strategie, e soprattutto l'ambiente certo in cui sono collocate tute le operazioni.

Se è stato possibile il superamento della matematica finanziaria, concentrata sul valore temporale del denaro, è stato perché nella seconda metà del '900 si sono attuate due rivoluzioni, entrambe in ambito universitario, legate al prepotente sviluppo degli strumenti matematici, probabilistici e statistici usati nella pratica finanziaria.

La prima rivoluzione in finanza iniziò con la pubblicazione nel 1952 della prima versione della tesi di dottorato "Portfolio Selection" di Markowitz ([16]), che si proponeva di individuare la relazione tra rischio e rendimento di un portafoglio, che ha dato luogo al criterio di selezione media-varianza, con cui viene evidenziata l'efficienza dei portafogli.

Con Sharpe ([21]) si passa al portafoglio di mercato ed alla individuazione del coefficiente beta, con cui si isola la componente non diversificabile del rischio. Il modello assume le ipotesi di mercato perfetto: si apre quindi un ampio campo di studi per il superamento almeno di alcune di tali ipotesi.

Si passa successivamente dall'approccio individuale all'approccio di mercato, con l'analisi di progetti di investimento, obbligazioni e azioni, il cui prezzo viene regolato da domanda ed offerta: si richiede non più l'equità tra due o più soggetti, ma l'equità nel mercato e le proprietà di equivalenza intertemporale diventano i requisiti necessari a consistenza e razionalità dei mercati dei capitali.

Lo sviluppo delle tecniche di ottimizzazione ha poi dato avvio all'approccio decisionale, fornendo gli strumenti per la scelta tra alternative diverse per soddisfare le preferenze degli utilizzatori finali.

Tali analisi erano ancora limitate ad un orizzonte temporale uniperiodale: è merito di Merton ([19]), se lo studio dei processi stocastici di Wiener e successivamente l'aggiunta di componenti poissoniane, ha portato ad una teoria dinamica del portafoglio, con una applicazione del controllo stocastico.

Dopo aver depurato il mercato da performance non efficienti, la scelta viene fatta esprimendo le preferenze dei singoli investitori mediante funzioni di utilità. Viene quindi approfondito il ruolo dell'avversione al rischio e delle proprietà di concavità che la caratterizzano.

La seconda rivoluzione in finanza è legata allo sviluppo dei derivati ([5]). Il problema della valutazione di un'opzione call di tipo europeo si basa sulla costruzione di un portafoglio, che rappresenti un'opzione sintetica in grado di replicare i flussi di quella originaria in modo tale che non siano possibili opportunità di arbitraggio.

Da ciò si riscontra un notevole sviluppo di nuovi prodotti derivati, la cui valutazione sfrutta la trattabilità analitica del processo stocastico di Wiener.

2 Le critiche al modello di portafoglio

Molte e diverse sono le ipotesi su cui si basano la teoria del portafoglio e l'equilibrio del mercato efficiente. Ma pur essendo ancora oggi di largo impiego operativo e diffusamente insegnato, il modello di portafoglio ha conosciuto fin da subito un'attenta critica, accompagnata dal tentativo di ritrovare i principi fondamentali pur rinunciando via via alle ipotesi.

Accanto alla trattazione dei costi di transazione e delle asimmetrie informative, particolare attenzione deve essere posta alla trattazione del rischio.

Nella teoria del portafoglio e con le ipotesi di mercato efficiente si assume che la misura di rischio sia la volatilità e si accetta che gli investitori siano avversi al rischio.

Ma gli investitori sono piuttosto interessati alle perdite, dunque ad una downside volatility. Inoltre sono presenti sul mercato titoli molto speculativi che non rispondono alla logica del "maggior rischio implica maggior rendimento", secondo il criterio media-varianza.

La mancanza di una comprovata correlazione tra rischio e rendimento non è il solo problema. La volatilità non può essere supposta costante nel tempo. Così il beta cambia nel tempo e non può essere utilizzato per predire la volatilità futura. Ed il CAPM è interamente basato su tale coefficiente ([12]), fino a giungere alla famosa frase "Beta è morto".

Il problema è di fatto il gran numero di ipotesi su cui si fonda la moderna teoria del portafoglio.

E per quanto riguarda l'ipotesi di mercato efficiente, se è vero che su 115 fondi esaminati solo uno si è comportato meglio del mercato, è pur vero che, per avere una significatività del 95% ci vorrebbero 70 anni di dati trimestrali.

Iniziate così le critiche al modello di portafoglio si sono aperti interessanti campi di studio.

Nel seguito ne menzioneremo alcuni, a titolo esemplificativo, per provare come il dibattito sia ancora molto vivace.

3 Introduzione ai moderni sviluppi del rischio finanziario

In passato la teoria degli investimenti teneva conto del rischio mediante un fattore correttivo del rendimento atteso, risk adjusted return, ottenendo così uno strumento che consentiva un confronto immediato. Markowitz ([16]) propose di valutare il rischio attorno al valore atteso attraverso la distribuzione congiunta del rendimento degli investimenti, cosa possibile perché dal punto di vista statistico le distribuzioni multivariate sono caratterizzate dal contributo marginale delle singole componenti e dalla loro struttura di dipendenza; egli faceva attenzione solamente ai primi due momenti delle distribuzioni univariate, media e varianza (o deviazione standard), ed al coefficiente di correlazione lineare di Pearson.

Sostanzialmente si riferiva alla distribuzione che per antonomasia dipende da due soli parametri, quella normale. Ma, la regolarità e la semplicità della distribuzione normale vengono smentite dalle distribuzioni empiriche: ci si muove pertanto verso lo studio di distribuzioni dei rendimenti più complesse, approfondendo le condizioni di: skewness, kurtosis e code spesse.

La varianza veniva assunta come misura di rischio, ma studi successivi hanno messo in evidenza che una misura di dispersione può essere adottata come misura di rischio solo se le distribuzioni sono simmetriche. Si apre quindi la strada allo sviluppo di nuove misure di rischio, passando da un'analisi direttamente probabilistica a motivazioni di natura economica per la definizione di un capitale di rischio.

Inoltre il coefficiente di correlazione, applicato da Markowitz, misura la codipendenza tra le componenti lineari di X ed Y

$$\rho\left(X,Y\right)^2 = \sigma_Y^2 - \min E\left[(Y-\left(aX+b\right))^2\right]/\sigma_Y^2,$$

impedendo di valutare gradi di dipendenza superiori, che possono essere affrontati con lo sviluppo della teoria delle copule.

Per ogni vettore di ripartizione w ed ogni vettore aleatorio dei rendimenti X, la varianza di una combinazione lineare $w^T X$ verifica la relazione

$$\sigma^2\left(w^T X\right) = w^T \operatorname{cov}\left(X\right) w,$$

che consente di trattare agevolmente portafogli di investimenti.

Rimane quindi giustificato lo studio separato delle distribuzioni e delle misure nella rappresentazione e quantificazione dei rischi.

3.1 Rilevanti distribuzioni di probabilità in finanza: le distribuzioni α - stabili

Le distribuzioni α - stabili sono una classe di leggi probabilistiche che hanno ampiamente interessato sia la teoria sia le applicazioni. In finanza tale classe di modelli probabilistici, generalizzando la distribuzione normale, consente picchi molto elevati e code spesse ed è pertanto più realistica.
La caratteristica definitoria ed il motivo fondante per il termine α-*stabile* è che la forma non si modifica sotto l'operazione di addizione, a meno di scala e shift.

Le distribuzioni normali in realtà sono α-stabili poiché la somma di variabili aleatorie normali è ancora normale: la famiglia è perciò chiusa rispetto all'addizione. La seguente definizione, estendendo le distribuzioni normali, si propone di caratterizzare l'intera famiglia chiusa rispetto all'addizione.

Una variabile aleatoria si dice α-***stabile*** se verifica la condizione,

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \overset{d}{=} c_n X + d_n ,$$

per ogni $X, X_1, X_{2,} ..., X_n$, variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite, e costanti opportune $c_n > 0, d_n$. Il simbolo $\overset{d}{=}$ rappresenta l'uguaglianza in distribuzione, ossia primo e secondo membro hanno la stessa distribuzione.

La famiglia di tutte le leggi α-stabili dipende da quattro parametri $(\alpha, \beta, c, \gamma)$ e si usa scrivere $S(\alpha, \beta, c, \gamma)$:
α è detto ***indice di stabilità*** od ***esponente caratteristico*** ed è il parametro della kurtosis: deve cadere nell'intervallo $0 < \alpha \leq 2$; per la costante si deve avere la forma $c_n = n^{1/\alpha}$. Per $\alpha < 2$ la distribuzione può essere asimmetrica, addirittura concentrata su un semiasse se $\alpha < 1$.
Il parametro β è noto come ***skewness,*** indice di asimmetria, della legge e deve cadere nell'intervallo $-1 \leq \beta \leq 1$; se $\beta = 0$ la distribuzione è simmetrica, se $\beta > 0$ è asimmetrica verso destra, se $\beta < 0$ è asimmetrica verso sinistra.
Sono quindi i parametri α e β a determinare la forma della distribuzione; il parametro c è un parametro di scala, legato al rischio, e può essere qualsiasi numero positivo;
γ è il parametro di posizione, in pratica la media, che, se positivo, sposta la distribuzione verso destra, se negativo, la sposta verso sinistra.

Se X_1 segue una distribuzione α-stabile $S(\alpha,\beta_1,c_1,\gamma_1)$, X_2 la distribuzione $S(\alpha,\beta_2,c_2,\gamma_2)$, con lo stesso indice α, a parità di α, gli altri parametri per la somma X_1+X_2 diventano

$$\beta=\frac{\beta_1 c_1^\alpha+\beta_2 c_2^\alpha}{c_1^\alpha+c_2^\alpha},\ c=\left(c_1^\alpha+c_2^\alpha\right)^{1/\alpha},\ \gamma=\gamma_1+\gamma_2,$$

evidenziando la relazione di c con la varianza e di γ con il valore atteso della somma di una normale.

È importante dare una rappresentazione analitica delle distribuzioni α-stabili e ciò può essere fatto mediante la funzione caratteristica: una distribuzione α-stabile ha funzione caratteristica

$$\phi_X(t)=E\exp\{iXt\}=\exp\left\{i\gamma t-c|t|^\alpha\left(1-\beta sign(t)z(t,\alpha)\right)\right\}\text{ per } t\in\Re$$

dove γ è una costante reale, $c>0$, $\alpha\in(0,2]$, $\beta\in[-1,1]$,

$$z(t,\alpha)=\begin{cases}\tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) & se\quad \alpha\neq 1\\ -\dfrac{2}{\pi}\ln|t| & se\quad \alpha=1\end{cases}.$$

Se $\beta=0$ le due parametrizzazioni coincidono.

Si verifica che al limite la probabilità delle code tende a $P(X>x)\approx c_\alpha x^{-\alpha}$ per $x\to\infty$ con c costante opportuna. Così per $0<\alpha<2$ i momenti sono finiti, $E\left[X^r\right]<\infty$ se è $0<r<\alpha$, mentre tutte le distribuzioni stabili non normali hanno varianza infinita, $E\left[X^2\right]=\infty$.

Si assuma $\gamma=0$. Per $\alpha=2$ e $\beta=0$ si ottiene la distribuzione normale: la sua funzione caratteristica è

$$\phi_X(t)=\exp\left(-ct^2\right),$$

con media nulla e varianza $\sigma^2 = 2c$: la distribuzione normale dipende da due soli parametri, quello di posizione γ, quello di rischio c, mentre le altre distribuzioni stabili dipendono da tutti e quattro i parametri $(\alpha, \beta, c, \gamma)$.

Anche la distribuzione di Cauchy e quella di Levy sono α-stabili.

La legge di Cauchy è α-stabile con indice $\alpha = 1$

$$\phi_X(t) = \exp\left\{-c|t|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}sign(t)\ln|t|\right)\right\}.$$

Si riconoscono distribuzioni di Cauchy simmetriche se $\beta = 0$.

Il parametro c, che abbiamo visto legato alla varianza nel caso di distribuzione normale, $c = \dfrac{\sigma^2}{2}$, ha significato analogo anche per le altre distribuzioni α-stabili, dove la varianza è infinita.

La distribuzione di Levy ha parametro $\alpha = 1/2$, e dunque presenta kurtosis, è fortemente asimmetrica, positiva solo per valori superiori a zero e quindi è $\beta = 1$. La funzione caratteristica è reale se e solo se $\beta = 0$ e l'espressione

$$\phi_X(t) = \exp\left(-c|t|^\alpha\right)$$

caratterizza le distribuzioni stabili simmetriche.

Tutte le distribuzioni con $\alpha < 2$ sono note come ***Pareto stabili***.

L'importanza di tale famiglia è dovuto non solo alla flessibilità con cui consentono di rappresentare le distribuzioni, con forme e proprietà diverse, ma anche per la rilevanza che consentono di dare alle code:

a		$P(X > a)$	
	normale	*Cauchy*	*Levy*
0	0,5	0,5	1
1	0,1587	0,25	0,6827
2	0,0228	0,1476	0,5205
3	0,001347	0,1024	0,4363
4	0,00003167	0,078	0,3829
5	0,00000002866	0,0628	0,3453

3.2 Un'applicazione delle distribuzioni α-stabili alla selezione del portafoglio

Minimizzando il rischio per un dato livello di rendimento atteso, applicando cioè il criterio media-rischio, si individuano i portafogli efficienti. Ci si domanda se ciò è ancora possibile in un ambiente di distribuzioni a varianza infinita come è quello delle distribuzioni α-stabili

Il vettore di variabili aleatorie rendimento, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ in $\Re^n$ è detto ***α-stabile*** se per ogni $a, b > 0$ esistono $c > 0, d \in \Re^n$ tali che.

$$a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{X}_2 \overset{d}{=} c\mathbf{X} + \mathbf{d}$$

con $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ indipendenti. Pertanto, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ segue una ***distribuzione multivariata α-stabile*** con $0 < \alpha < 2$, se esistono una misura finita Γ_x ed un vettore $\mu \in \Re^n$ tali che la funzione caratteristica sia

$$\phi_X(x) = \exp\left\{ i(\mathbf{t}, \mu) - \int |(\mathbf{t}, \mathbf{s})|^\alpha \left(1 + i\, sign((\mathbf{t}, \mathbf{s}))\, z(\alpha, \mathbf{s}, \mathbf{t})\right) \Gamma_x(d\mathbf{s}) \right\}$$

dove $(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ indica il prodotto scalare e dove si è posto

$$z(t, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) & se \quad \alpha \neq 1 \\ -\dfrac{2}{\pi} \ln|(\mathbf{t}, \mathbf{s})| & se \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

Nel caso di un vettore aleatorio, media e varianza vengono perciò sostituiti dal parametro $\mu \in \Re^n$ e dalla ***misura finita*** Γ_x sull'ipersfera unitaria $S_n = \{s \in \Re^n : \|s\| = 1\}$.

Si consideri ora il portafoglio $\mathbf{Y} = (\mathbf{w}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$, combinazione di investimenti: se i rendimenti dei titoli seguono una distribuzione α-stabile, essendo la varianza illimitata, la nisura di rsichio viene sostituita da una nuova misura di rischio Γ_x, rappresentata dal parametro di scala, funzione convessa di **w**

$$c_{\mathbf{X_p}} = \left(\int_{S_n} \left| (\mathbf{w}, \mathbf{s}) \right|^{\alpha} \Gamma_{\mathbf{X}} (d\mathbf{s}) \right)^{1/\alpha}$$

Il problema della determinazione dei portafogli efficienti diviene così

$$\min_{\mathbf{w}} c_{\mathbf{X_p}}$$

con il vincolo di rendimento minimo $(\mathbf{w}, \mu) \geq a$ e con il vincolo di capitale $(\mathbf{w}, \mathbf{e}) = 1$ ([20]).

4 Lo sviluppo delle misure di rischio

Per un portafoglio di investimenti si tengono generalmente sotto controllo rischio di tasso di interesse, rischio di cambio, rischio relativo alle quotazioni azionarie, rischi distinti in rischio sistematico e rischio non sistematico, rischi relativi ai beni reali.

A tali rischi occorre dare una opportuna valutazione economica: finché ciò è possibile mediante l'assunzione di posizioni deterministiche, si definisce l'insieme *G* dei rischi accettabili e si applica il modello ADEH ([2]), che evidenzia gli assiomi che devono essere verificati da una misura di rischio per rispettare la coerenza economica.

La misura di rischio in termini puramente monetari viene intesa come il minimo fabbisogno di cassa *m* che il decisore deve aggiungere alla posizione rischiosa X e che va investito in modo "prudente" nello strumento finanziario certo, di rendimento *r,* per poter rientrare in una posizione "accettabile" e proseguire nei suoi progetti. Si sposta quindi l'attenzione dalla variabilità alla ricchezza finale. Si può allora considerare come misura del rischio X la mappa $\rho_{G,r}$,

$$\rho_{G,r}(X) = \inf \{ m : mr + X \in G \},$$

che fornisce una misura delle perdite in un fissato periodo.

Per stabilire quali condizioni dovrebbero essere verificate per una corretta misura di rischio, ricordiamo le tre proprietà che un funzionale $\rho : X \to \Re$ verifica per essere una distanza:

- $\rho(x,x) = 0$
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

ed è proprio da qui che Artzner et al. hanno preso ispirazione per stabilire le condizioni minimali per una misura di rischio.
$\rho_{G,r}$ verifica le seguenti proprietà che ne caratterizzano la *coerenza*:

- ***invarianza per traslazioni*** $\rho(X + \alpha r) = \rho(X) - \alpha$, per ogni $X \in G$ e per ogni $\alpha \in \Re$. Così investire l'importo addizionale α nell'investimento di riferimento, diminuisce il rischio;
- ***subadditività*** $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$, cosicché l'aggiunta di nuovi rischi non peggiora la situazione (ricordiamo che questa proprietà costringe ad escludere varianza e semivarianza, misure classiche di rischio);
- ***omogeneità positiva*** $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$. Si assume un impatto del rischio della stessa dimensione sul capitale iniziale e finale. Dalla subadditività segue $\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X)$, mentre, se si assume che l'investimento λX sia meno liquido è verificata la disuguaglianza opposta $\rho(\lambda X) \geq \lambda \rho(X)$;
- ***monotonia*** $X \leq Y \Leftrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ in base alla quale il classico obiettivo della teoria del portafoglio, combinazione di valore atteso e deviazione standard, non può essere accettato.

Si parlerà di misure ***model dependent***, se si fa riferimento ad una specifica distribuzione di probabilità: poiché è difficile conoscere la distribuzione di probabilità effettiva, si preferisce fare riferimento ad un'intera famiglia. Allora, se Π è la famiglia delle distribuzioni di probabilità, la misura di rischio può essere espressa come l'opposto del valore atteso della ricchezza finale massimizzato su Π,

$$\rho(X) = \sup\{v\, E_P[- \quad X] : P \in \Pi\},$$

essendo v il fattore di sconto.

Laddove si accettino posizioni correttive di natura aleatoria, sia **M** tale insieme: la misura di rischio assume ora il significato di minimo costo da sostenere per rendere accettabile la posizione,

$$\rho_G(X) = \inf\{\pi(m): X + m \in G, m \in \mathbf{M}\}.$$

Se si indica con $v(p)$ il fattore di sconto, la misura di rischio può essere equivalentemente intesa come il massimo valor medio scontato di $(-X)$ rispetto agli scenari possibili.

$$\rho(X) = \sup\{v(P)E_P[- \quad X]: P \in \Pi\}.$$

Ma la ricerca è tuttora in fase di sviluppo.

La deviazione standard è ancora comunemente usata nella teoria del portafoglio, il VaR è una misura standard usata da regulators ed investment banks: si deve però evidenziare che la deviazione standard non è in grado di descrivere gli eventi rari, il VaR non è in grado di aggregare correttamente i rischi.

Si osservi che, dal punto di vista della rischiosità, se la subadditività viene violata:

- è opportuno tenere i rischi in conti separati;
- un aumento di capitale è più conveniente, se ripartito nelle singole unità;
- non è sufficiente controllare il rischio delle singole unità aziendali.

Un esempio di misura coerente è il valore atteso distorto.

Una estensione del concetto di misura di probabilità è quello di ***capacità***, che, in luogo dell'additività, si limita ad imporre la subadditività: si tratta di una funzione di insieme v su $\boldsymbol{A}$, monotona, $A, B \in \boldsymbol{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$, normalizzata, $v(\emptyset)=0, v(S) = 1$.

Il classico valore atteso è allora sostituito dall'integrale di Choquet ([7]), che applica una capacità in luogo di una misura,

$$I(X) = \int X dv = \int_{-\infty}^{0} (v(X \geq t) - 1) dt + \int_{0}^{+\infty} v(X \geq t) dt .$$

Se inoltre si richiede che la funzione v sia concava,

$$\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) \leq \nu(A) + \nu(B)$$

l'integrale di Choquet $I(X) = \int X \, d\nu$ conduce alla formula di Yaari ([21])

$$I(X) = \int X \; dg \circ P :$$

esiste quindi un'unica funzione non decrescente $g : [0,1] \to [0,1]$ tale che la capacità ν può essere rappresentata come trasformata della probabilità $\nu = g \circ P$, cosicché $I(X)$ definisce il ***valore atteso distorto***.

Un altro esempio di misura di rischio coerente è l'***expected shortfall***. Si potrebbe dire che fornisce una protezione al valore atteso delle perdite. Infatti, fissata una soglia critica per le perdite $\alpha = VaR_k(X)$, corrispondente al livello di confidenza k,

$$ES_k(X) = E\left[X : X \geq VaR_k(X)\right]$$

misura il valore atteso delle perdite che eccedono α, ovvero concentra l'attenzione sulle perdite attese nelle code.

Le Istituzioni Finanziarie possono quindi adottare un ***economic capital*** basato sul shortfall risk, prendendo la differenza tra la perdita attesa che eccede α rispetto alla perdita attesa

$$EC_{ES}(\alpha) = E[X : X \geq \alpha] - E[X].$$

Vogliamo mettere a confronto la perdita attesa sopra la media basata sull'expected shortfall, EC_{ES}, e quella basata sul VaR, $EC_{VaR_{0,99}}$, sopra il 99%-quantile. Se X segue la distribuzione normale con parametri $N(1,1)$, la perdita attesa sopra la media è trascurabile, con una differenza relativa percentuale $rel.diff.\% = 14$: tale differenza diventa sempre più significativa passando dalla distribuzione Weibull $Weil(1,1)$ con $rel.diff.\% = 27$ fino alla t-Student con parametro 3, $t(3)$, con $rel.diff.\% = 54$ in accordo alla seguente tabella, che per completezza riporta anche la deviazione standard,

	$N(1,1)$	$Weil(1,1)$	$t(3)$
$EC_{VaR_{0,99}}$	$2,32$	$3,6$	$4,54$
EC_{ES}	$2,66$	$4,6$	$6,99$
std	1	1	$1,73$
$rel.diff\,(\%)$	14	27	54

Si ha quindi una indicazione di sensitività dell'economic capital sia alla distribuzione di probabilità sia alla scelta della misura di rischio.

4.1 Allocazione coerente dei rischi

La protezione rispetto a rischi futuri può essere regolata bilanciando investimenti rischiosi con investimenti privi di rischio, ma una forma di protezione emerge anche da opportune combinazioni di investimenti tra loro. Le misure di rischio sono state analizzate dal punto di vista teorico per stabilire requisiti minimali di coerenza, valutando in particolare la subadditività, legata alla diversa percezione del rischio nella formazione di portafogli. Denault ([11]) si è chiesto se anche tale problema potesse trovare un fondamento teorico di coerenza ed ha cercato di darne una risposta.

Sia $[0,T]$ l'orizzonte temporale in cui si suppone non possano avvenire scambi e rappresenti quindi il periodo di riferimento, $L^\infty(\Omega,\mathbf{A},P)$ sia lo spazio delle variabili aleatorie limitate su un assegnato spazio di probabilità.

Se X_i, $i=1,...,n$ è la variabile aleatoria limitata che rappresenta il rendimento in T, $u=(u_1,...,u_n)$ il vettore ripartizione del capitale unitario, la somma $X(u)=\sum_{i=1}^{n} u_i\, X_i$, rappresenta il rendimento del portafoglio u .

La ripartizione dei rischi avviene in modo Pareto-efficiente rispetto ad una misura di rischio coerente $\rho : L^\infty \to \Re$.

Dato un portafoglio iniziale $u=(u_1,...,u_n)$ ed una misura di rischio ρ su $\Re^n$, una ripartizione unitaria del rischio è il vettore $(a_i(\rho,u): i=1,...,n)$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, a_i(\rho,u) = \rho(u).$$

Le condizioni di coerenza per una ripartizione a sono:

- ***subadditività***

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \, a_i(\rho, u) \leq \rho(v) \text{ per ogni } 0 \leq v \leq u$$

e quindi nessuna subcoalizione v di u mostra minor rischio da sola di quanto ne abbia per il fatto di essere contenuta in u;

- ***simmetria***. Se vale l'uguaglianza

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} v_i \, a_i(\rho, u) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} v_i \, a_i(\rho, u)$$

ed i portafogli r, s hanno lo stesso capitale di rischio all'interno del portafoglio, lo hanno anche presi singolarmente, ossia $a_r(\rho, \; u) = a_s(\rho, \; u)$ e quindi la ripartizione dipende solo dal contributo al rischio e non da altri fattori;

- ***quota priva di rischio***,

$$\rho(k\,u) = -\,k = u_0$$

e se si aumenta la quota dell'investimento privo di rischio significa che si sta aumentando nella stessa proporzione il capitale investito.

Ricordato che una funzione $f : D \rightarrow \Re, \, D \subseteq \Re^n$, si dice positivamente omogenea di grado 1 se $f(k\,u) = k\,f(u), k > 0, u \in D$, in ipotesi di differenziabilità vale il teorema di Eulero e quindi l'uguaglianza

$$f(u) = \sum_{i01}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(u).$$

Perciò sotto condizioni opportune di regolarità, a seguito dei requisiti di coerenza, l'allocazione paretiana impone che sia

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

Se la misura di rischio non è differenziabile, si può far riferimento alla derivata di Gateaux.

Se utilizziamo come misura di rischio coerente l'expected shortfall, la soluzione comporta qualche difficoltà, non essendo derivabile la funzione VaR: infatti in genere la funzione perdita risulta discontinua. Se però in prima approssimazione la supponiamo continua, è possibile calcolare il contributo al rischio delle diverse componenti,

$$\frac{\partial ES_k}{\partial w_i}(X) = E\left[X_i : X \geq VaR_k(X)\right].$$

Se non è possibile calcolare la derivata parziale, si può definire lo scostamento

$$\zeta_i = E\left[L_i : L \geq VaR_k(L)\right] - E\left[L_i\right],$$

per $L = \sum_{i=1}^{n} w_i L_i$ funzione di perdita, e l'economic capital basato sull'expected shortfall rispetto alla media $EC_{ES_a} = \sum_{i=1}^{n} w_i \zeta_i$ risulta scomposto nei singoli contributi.

4.2 Approccio dinamico alle misure di rischio

Finora il rischio è stato misurato nell'ottica temporale di un solo periodo, ma investimenti e contratti assicurativi si sviluppano su orizzonti temporali più estesi e ciò deve comparire esplicitamente nella definiziaone e nella misurazione del rischio. L'approccio ricorsivo di Wang ([22]), in ipotesi di separabilità del rischio nel tempo, esprime la misura come valore attuale atteso in senso generalizzato delle perdite.

Sia Ω lo spazio degli stati: per ogni profilo di rischio (x, d), dove x descrive la posizione corrente, *d* riassume tutto il rischio previsto per il futuro, la misura di rischio $\tilde{V}(d) : \Omega \to \Re$ unifica posizione corrente e posizione futura,

$$\tilde{V}(d)(\omega) = V\left[\tilde{x}(\omega), \tilde{d}_1(\omega)\right].$$

Come primo passo si calcola l'equivalente certo del rischio futuro, rendendolo confrontabile con il rischio corrente,

$$V(d) = \mu\left(\widetilde{V}(d)\right),$$

essendo μ tale che

$$\mu(x) = x \text{ per ogni } x \in \Re,\ \mu(\tilde{x}) \geq \mu(\tilde{y}) \text{ se } \tilde{x} \geq \tilde{y}.$$

Come secondo passo si applica un aggregatore temporale, $W(x,\xi)$, $W : \Re \times \Re \to \Re$, rappresentato da una funzione continua e strettamente monotona,

$$V(x,d) = W\left(x, \mu\left(\widetilde{V}(d)\right)\right),$$

In tal modo sono verificate le condizioni di coerenza, ma l'aggiunta del tempo richiede l'introduzione di due ulteriori condizioni:

- ***indipendenza del futuro***. La misura di rischio della posizione corrente è indipendente dalle perdite future, se valendo la disuguaglianza $V(x_1, x_2; \Delta) \geq V(x_1^{'}, x_2^{'}; \Delta)$ per la posizione iniziale $(x_1, x_2), (x_1^{'}, x_2^{'})$ e per le perdite deterministiche Δ, la stessa disuguaglianza vale per le nuove perdite *Δ',* $V(x_1, x_2; \Delta') \geq V(x_1^{'}, x_2^{'}; \Delta')$.
- ***indifferenza rispetto al tempo***. Due rischi futuri *d* and *d'* con la stessa collezione di eventi worse-than, hanno la stessa misura di rischio, $V(d) = V(d')$.
-

La condizione di indipendenza rispetto al futuro, caratterizza *W*

$$W(x,\xi) = \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \beta\varphi(\xi)\right)$$

come media generalizzata, essendo β il fattore di sconto. La funzione equivalente certo prende la forma analitica dall'ipotesi di indifferenza rispetto al tempo,

$$\mu[\tilde{x}] = (\psi \circ \varphi)^{-1}\left(\int \psi \circ \varphi(\tilde{x})d\nu\right),$$

dove φ e ψ sono funzione strettamente crescenti, con $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, ν è una funzione d'insieme monotona. In questo modo è possibile dare espressione analitica alla misura di rischio,

$$V(x,d)=\varphi^{-1}\Big(\varphi(x)+\beta\psi^{-1}\Big[\int\psi\left[\varphi\left(\tilde{V}(d)\right)\right]d\nu\Big]\Big).$$

Ma se si privilegia l'ottica ottimizzatoria, il management dovrà risolvere il problema

$$J(X)=\inf_{z}\sup_{y}W(x_0,\xi),$$

dove z indica la strategia di investimento, mentre lo scenario risulta assegnato dalla variabile aleatoria y. La condizione di coerenza sulle somme di posizioni rischiose può essere pertanto indebolita in una quasiconvessità ([18]),

$$J(X_1+X_2)\le \max\left\{J(X_1),J[X_2]\right\}.$$

4.3 Misure di dipendenza tra variabili aleatorie

Nella teoria tradizionale del rischio le perdite venivano assunte come indipendenti: la loro rilevanza mostra oggi come sia fondamentale individuare adeguati strumenti di misurazione della dipendenza, il cui carattere deve però essere adeguato al particolare contesto cui si applica. Per tener conto del grado di interdipendenza tra investimenti in un portafoglio, si deve evidenziare il campo limitato di validità della correlazione lineare verso le copule.

La misura di dipendenza tra due rischi X,Y più nota è la correlazione lineare

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}:$$

- in caso di indipendenza delle variabili avremo $\rho(X,Y)=0$, ma non viceversa;
- in caso di perfetta dipendenza lineare avremo $\rho(X,Y)=\pm 1$.

Si tratta di una misura invariante per trasformazioni lineari delle variabili,

$$\rho(aX+b,cX+d)=f(ac)\rho(X,Y).$$

Il coefficiente di correlazione deve la sua popolarità, oltre alla semplicità di calcolo, all'essere la naturale misura di dipendenza per le distribuzioni multivariate normali.

A partire dalla teoria del portafoglio classica in cui si fa l'ipotesi di distribuzione normale multivariata, la correlazione viene utilizzata come misura canonica di dipendenza per descrivere le interrelazioni tra due o più variabili. Finché si mantiene questa ipotesi sulla distribuzione, la struttura di dipendenza è compiutamente descritta dalla matrice varianza-covarianza. Essa continua a valere fino alle recenti estensioni alle distribuzioni sferiche ed ellittiche. Se però si rimuove questa ipotesi risulta evidente la portata limitata della sua applicabilità.

Inoltre presenta notevoli svantaggi poiché:

- essendo una misura scalare, non è in grado di cogliere pienamente la dipendenza tra rischi diversi;
- dipende dalle distribuzioni marginali, come si vede dalla

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\iint_D\left[H(x,y)-F(x)G(y)\right]dxdy$$

- la condizione $\rho(X,Y)=0$ indica incorrelazione, ma non indipendenza, trattandosi di un indicatore di natura lineare.

Di qui l'importanza di passare alle copule, per misurare la dipendenza non lineare, dato che offrono la possibilità di specificare separatamente le distribuzioni marginali e la struttura di dipendenza, valorizzando i fattori di rischio e le loro relazioni.

Prima di definire le copule, precisiamo quali sono le condizioni minimali con cui caratterizzare una misura di dipendenza:

Un funzionale $\delta(X,Y)$ a valori reali è una ***misura di dipendenza*** delle variabili aleatorie X,Y, che gode delle seguenti proprietà:

- esistenza, $\delta(X,Y)$ è definita per ogni coppia di variabili aleatorie continue X,Y;
- simmetria, $\delta(X,Y)=\delta(Y,X)$;
- normalizzazione, $-1\le\delta(X,Y)\le 1$.

L'ultima disuguaglianza è verificata dalla correlazione: qualora si intenda proseguire verso una condizione più forte di indipendenza,

$$\delta(X,Y)=0 \text{ se e solo se X ed Y sono indipendenti,}$$

tale condizione di normalizzazione deve essere sostituita dall'intervallo unitario $0 \le \delta(X,Y) \le 1$.

Ci si propone ora di descrivere la struttura di dipendenza della distribuzione congiunta bivariata $H(X,Y)=H(X \le x, Y \le y)$.

Una ***copula bivariata*** è una funzione di distribuzione bivariata $C:[0,1]^2 \to [0,1]$ tale che le sue marginali sono uniformi standard.
Essa verifica pertanto le seguenti proprietà:

- per ogni $(u,v) \in [0,1]^2$ è $C(u,0)=0=C(0,v)$, e $C(u,1)=u$, $C(1,v)=v$
- per ogni $u_1,u_2 \in [0,1]$, $v_1,v_2 \in [0,1]$ con $u_1 \le u_2$, $v_1 \le v_2$ si ha
$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1) \ge 0.$$

Per poter arrivare alla costruzione concreta di una copula bivariata, premettiamo il ***teorema di Sklar***:

- se $H(x,y)$ è una funzione di probabilità cumulata bivariata con distribuzioni marginali $F(x),G(y)$, esiste una copula bivariata $C:[0,1]^2 \to [0,1]$, tale che $H(x,y)=C(F(x),G(y))$; essa è anche unica, se $F(x),G(y)$ sono continue.
- Viceversa, se C è una copula bivariata ed F,G sono funzioni di probabilità cumulata univariate continue, $H(x,y)=C(F(x),G(y))$ è la funzione di probabilità congiunta che ha proprio F,G come distribuzioni marginali.

Mantenendo l'ipotesi di continuità delle marginali, la copula C di H è la distribuzione congiunta delle variabili trasformate uniformi $U=F(X), V=G(Y)$ con

$$C(u,v)=H\left(F^{-1}(u),G^{-1}(v)\right)$$

dove $F^{-1}(u)=\inf\{X:F(x)\geq u\}$, mostrando che, per una distribuzione bivariata qualsiasi, la copula rappresenta la struttura di dipendenza, passando da marginali uniformi a marginali qualsiasi.

Frechét ha dato un risultato fondamentale di limitazione alle distribuzioni congiunte in funzione delle distribuzioni di probabilità marginali.

Sia H la funzione di distribuzione congiunta con marginali univariate F,G. Allora per ogni $u,v\in[0,1]$ valgono le disuguaglianze

$$C_L\left(F(x),G(y)\right)\leq H(x,y)\leq C_U\left(F(x),G(y)\right)$$

dove il confine inferiore è $C_L=\max\{F(x)-G(y)-1,0\}$, mentre il confine superiore è $C_U=\min\{F(x),G(y)\}$.

Una delle forme di copule più usata è la ***copula normale*** applicata a marginali anch'esse normali,

$$C(u,v)=N_2\left(N^{-1}(u),N^{-1}(v)\right),$$

ma è di uso pratico anche la famiglia delle copule Archimediane.

Sia $\phi:[0,1]\to[0,\infty)$ una funzione continua, convessa, strettamente decrescente con $\phi(0)=\infty,\phi(1)=0$.

La trasformazione $\phi^{-1}\phi$ mantiene la distribuzione uniforme unidimensionale, $\phi^{-1}\phi(u)=u,u\in[0,1]$. Per passare a distribuzioni bidimensionali si applica la somma generalizzata,

$$\phi^{-1}\left(\phi(u)+\phi(v)\right),u,v\in[0,1],$$

Una ***copula Archimediana stretta*** con generatore ϕ ha espressione

$$C(u,v)=\phi^{-1}\left(\phi(u)+\phi(v)\right),u,v\in[0,1].$$

Si può osservare che, se è $\phi(0)<\infty$, il termine stretto viene abbandonato e $\phi^{-1}(s)$ viene sostituita dalla pseudoinversa

$$\phi^{[-1]}(s) = \begin{cases} \phi^{-1}(s) & se \quad 0 \le s \le \phi(0) \\ 0 & altrove \end{cases}.$$

A seconda della forma assunta dal generatore ϕ, si ottengono famiglie di copule Archimediane alternative.

4.4 Applicazioni delle copule

Un'applicazione alla ripartizione di portafoglio

Una copula n-dimensionale**,** n-copula, è una funzione $C:[0,1]^n \to [0,1]$ tale che:

a. $C(1,...,1,a_m,1,...,1) = a_m$ per ogni $m \le n$ ed ogni $a_m \in [0,1]$;

b. $C(a_1,...,a_n) = 0$ se $a_m = 0$ per ogni $m \le n$;

c. $C(\cdot)$ è n-crescente, nel senso che il C-volume di un intervallo n-dimensionale è non-negativo.

Così, se gli argomenti G_i per la copula $C(G_1,...,G_n):[0,1]^n \to [0,1]$ possono essere considerati distribuzioni marginali, una proprietà fondamentale per le copule differenziabili è

$$0 \le \frac{dC(\cdot)}{dG_i} \le 1$$

per ogni $i \in \{1,...,n\}$.

Si assuma che $C(\cdot)$ abbia la forma

$$C(G_1,...,G_n) = \varphi\left[\sum_{i=1}^{n} \psi(G_i)\right],$$

con $G_i \in [0,1]$ per ogni $i \in \{1,...,n\}$ e $\varphi(\cdot) \equiv \psi^{-1}(\cdot)$. Inoltre si richiede che $\psi(G)$ sia in Ψ, insieme delle funzioni analitiche strettamente decrescenti e strettamente convesse, $\psi:(0,1] \to [0,\infty)$ con $\psi(1) = 0, \lim_{t\to 0}\psi(t) = \infty$;

valga inoltre la disuguaglianza $(-1)^k \varphi^{(k)}(t) \geq 0$ per ogni $t \in (0, \infty)$ e per ogni $k \in \{1, ..., n\}$. Allora $C(G_1, ..., G_n)$ è una n-copula Archimediana con funzione generatore $\psi(u)$.

Per un vettore di marginali **G**, dove la i-ma componente $G_i(x_i)$ ha densità $g_i(x_i)$, la copula Archimediana ha funzione di densità congiunta

$$f(x_1, ..., x_n) = \varphi^{(n)}\left[\sum_{i=1}^{n} \psi(G_i(x_i))\right] \prod_{i=1}^{n} \eta_i(x_i)$$

con $\eta_i(\cdot) = \psi^{(1)}[G_i(\cdot)] g_i(\cdot)$.

Pertanto il problema di trovare l'allocazione $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ che massimizza l'utilità attesa ([14])

$$\max\{E[u(R)] : R = \mathbf{a} \times \mathbf{x}, \mathbf{s} \times \mathbf{a} = \mathbf{1}\}$$

ha soluzione:

- per una n-copula Archimediana con generatore $\psi[G(x)]$ e $\eta_j(x) \geq \eta_k(x)$ sarà $a_j^* \leq a_k^*$ per ogni funzione di utilità avversa al rischio.

Un'applicazione delle copule alle opzioni

Si consideri un sottostante di valore X_1: l'opzione binaria con prezzo di esercizio K_1, paga 1 se vale la disuguaglianza $X_1 \geq K_1$ in T, nulla altrimenti. Se l'opzione binaria è doppia, si prende in considerazione anche un altro sottostante X_2 con prezzo di esercizio K_2 ed il payoff dipende da quattro stati

	stato A	*stato B*
stato A	$X_1 \geq K_1, X_1 \geq K_1$	$X_1 \geq K_1, X_1 < K_1$
stato B	$X_1 < K_1, X_1 \geq K_1$	$X_1 < K_1, X_1 < K_1$

dove A sta per alto, B sta per basso.

Se indichiamo con Π_1, Π_2 i prezzi delle opzioni binarie singole e supponiamo, ma solo per brevità, che sia i=0 il tasso privo di rischio, si perviene alla seguente tabella di esiti possibili a seconda degli stati

	prezzo	*AA*	*AB*	*BA*	*BB*
opzione binaria 1	Π_1	1	1	0	0
opzione binaria 1	Π_2	1	0	1	0
tasso privo di rischio	1	1	1	1	1
opzione binaria bivariata	Π	1	0	0	0

In assenza di opportunità di arbitraggio la funzione di prezzo che andiamo a determinare ([8]),

$$C\left(\Pi_1, \Pi_2\right) = \Pi\left(X_1 \geq K_1, X_2 \geq K_2\right),$$

verifica le proprietà:

- è definita in $I^2 = [0,1]\times[0,1]$ e prende valori in $I = [0,1]$;
- per ogni $\Pi_1, \Pi_2 \in [0,1]$, è $C\left(\Pi_1, 0\right) = 0 = C\left(0, \Pi_2\right)$ e $C\left(\Pi_1, 1\right) = \Pi_1$, $C\left(1, \Pi_2\right) = \Pi_2$;
- per ogni rettangolo $[\Pi_{11}, \Pi_{12}]\times[\Pi_{21}, \Pi_{22}] \subset [0,1]^2$ è verificata la disuguaglianza

$$C\left(\Pi_{12}, \Pi_{22}\right) - C\left(\Pi_{12}, \Pi_{21}\right) - C\left(\Pi_{11}, \Pi_{22}\right) + C\left(\Pi_{11}, \Pi_{22}\right) \geq 0,$$

che la caratterizza come indicatore di dipendenza.

Si vede quindi che il prezzo di una opzione binaria bivariata è proprio la copula della coppia $\left(X_1, X_2\right)$. Le disuguaglianze di Frechét

$$\max\left\{\Pi_1 + \Pi_2 - 1\right\} \leq P\left(X_1 \geq K_1, X_2 \geq K_2\right) \leq \min\left\{\Pi_1, \Pi_2\right\}$$

corrispondono alle strategie di superreplicazione.

5 Le imperfezioni del mercato

Molteplici sono le condizioni che caratterizzano il mercato e che vengono considerate imperfezioni rispetto all'impostazione della teoria dei mercati efficienti. In questa nota si prendono in esame solamente informazione asimmetrica e costi di transazione.

5.1 Il costo dell'informazione asimmetrica

Il modello di Kyle è ormai un punto fermo nell'analisi della formazione dei prezzi in condizioni di informazione asimmetrica. Supponiamo ([3]) che due diverse martingale **F** e **G** rappresentino l'informazione privilegiata e l'informazione pubblicamente disponibile.

Sia x_0 il numero di titoli posseduti inizialmente dal trader informato, X_t il numero di titoli posseduti al tempo t, Z_t il numero di titoli posseduti dai traders non informati. Una strategia di trading definisce un processo di ordini Y^X, con $Y_t^X = X_t(\omega) - x_0 + Z_t(\omega)$.

Le due condizioni che dovrebbero essere verificate in equilibrio dalla coppia X*, strategia di trading, S*, regola di prezzo, sono:

- i prezzi delle transazioni sono uguali al valore atteso condizionato del prezzo P a cui l'investimento rischioso sarà scambiato dopo la release di informazione,

$$\text{per ogni } t \;\; S_t^*\left(\omega, Y^{X^*}(\omega)\right) = E\left[P \middle| \mathbf{G}_t \vee \mathbf{F}_t\right]$$

- il trader informato, data la sua informazione e la regola di prezzo S*, cerca di raggiungere l'ottimo

$$X^* \in \arg\max_X E\left[U\left(W\left(X, S^*\right)\right)\right]$$

  essendo W la sua ricchezza finale. Così, il trader informato prende come data la regola di prezzo S*, mentre i prezzi dipendono dagli ordini Y^X.

Mentre il lavoro di Kyle perviene alla definizione di un equilibrio, ma assume che gli operatori siano neutrali al rischio, fallisce qui la ricerca di un equilibrio sia che si prenda come variabile di stato il processo di ordini Y^X, sia che si prenda come variabile di stato il prezzo. La impossibilità di raggiungere in questo modo l'equilibrio, mostra che lo studio deve concentrarsi sulla forma della funzione di prezzo.

5.2 I costi di transazione

Già negli anni '70 si era iniziato l'esame dei problemi introdotti nella teoria del portafoglio dalla presenza dei costi di transazione.

I costi di transazione possono essere distinti in commissioni di brokeraggio negli scambi e modifiche nei prezzi che dipendono dalle caratteristiche di non liquidità. Finché le componenti dei costi di brokeraggio vengono ignorate si possono generare revisioni troppo frequenti; mentre la componente di liquidità è dovuta al fatto che gli scambi non sempre possono avvenire in qualsiasi istante e per qualsiasi importo

Nel modello classico di portafoglio, uniperiodale e che utilizza i primi due momenti, si può discutere l'impatto del mercato e dei costi di transazione sui ben noti risultati analitici: costi di transazione proporzionali all'ammontare trasferito vengono studiati per il classico modello di Markowitz.

I modelli che introducono coefficienti di costo deterministici implicano una semplice riduzione del capitale disponibile agli investimenti. Ma di fatto si nota che il valore dell'investimento i-mo varia nel tempo e la quantità effettivamente scambiata, differisce dalla variazione di valore monetario: dunque, sarebbe più appropriato introdurre nelle componenti di costo elementi aleatori, seppure non correlati al rendimento. Il modello media-varianza si arricchisce così di una variabile decisionale rappresentata dal livello della transazione ed il risultato analitico passa da un teorema di separazione a due fondi ad un teorema a tre fondi ([17]):

- uno contro il rischio di mercato
- uno contro la differenza tra risultati realizzati ed aspettative
- uno contro i costi di transazione.

In ambito dinamico e stocastico lo sviluppo che ha avuto l'analisi dei costi di transazione utilizza costi fissi o proporzionali all'importo scambiato, ma le componenti di aleatorietà riguardano il rendimento e non i costi. Si trovano così modelli di controllo bang-bang e modelli di controllo stocastico, che applicano l'equazione di Bellman ([4]); nel modello di Korn ([15]) si prende in considerazione un costo somma di un termine fisso e di un termine che dipende dal volume degli scambi, in un contesto che prevede soltanto un numero finito di revisioni.

Ma la tematica si espande dalla teoria pura degli investimenti ad un contesto più ampio come quello dei fondi pensione. Infatti un concreto esempio di valutazione dell'impatto dei costi di transazione sulle strategie di investimento è proposto per un piano pensionistico in ([1]). La presenza dei costi di transazione rende cruciale la decisione di riallineare il portafoglio: questo può essere fatto solo in base al calendario, oppure quando un investimento devia dalla posizione ottimale; ma entrambi questi metodi sono arbitrari e subottimali. Ci si chiede allora se esista una politica ottima di ribilanciamento, dal confronto tra costo della subottimalità e costi di transazione.

Si osservi che, mentre i costi di transazione sono supposti noti, si evidenzia la difficoltà di stimare il beneficio che si può ottenere dal ribilanciamento.

Al costo esplicito del trading devono essere associati il costo di subottimalità della strategia ed i costi futuri attesi, come conseguenza delle decisioni precedenti. L'impatto dipende dalla funzione di utilità applicata come obiettivo.

L'approccio di confrontare costo di subottimalità della strategia adottata e costi di transazione è in genere analiticamente molto laborioso. Viene invece mostrato come utilizzando il metodo della programmazione dinamica si ottenga un effettivo vantaggio. Definita come funzione valore il "cost-to-go", somma del tracking error del periodo corrente, del costo di trading e dei costi futuri attesi, supponendo normale la distribuzione di probabilità dei rendimenti, si calcola la frontiera efficiente e poi su questa il portafoglio ottimo rispetto alla funzione utilità prescelta, quadratica, logaritmica, iperbolica, quantificando l'equivalente certo.

I risultati della simulazione mostrano un risparmio significativo, se il ribilanciamento viene effettuato utilizzando la relazione di ricorrenza della programmazione dinamica.

6 Il superamento del principio dell'unico prezzo

6.1 Lo sviluppo del principio di non arbitraggio

In un modello uniperiodale il principio di assenza di opportunità di arbitraggio richiede che il prezzo di un titolo sia, in condizioni deterministiche il valore attuale, in condizioni di incertezza il valore attuale atteso del flusso che genera alla fine del periodo.

Siano $y^1, y^2, ..., y^n$ le variabili aleatorie e per ogni $j = 1, ..., n$ sia $\pi\left(y^j\right)$ il prezzo di y^j. Si possono acquistare o vendere tutte le variabili aleatorie "autorizzate", che risultano cioè dalla combinazione lineare delle y^j, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j a_j, a_j \in \Re$ per ogni j, pagando $\sum_{j=1}^{n} a_j \pi\left(y^j\right)$. I prezzi sono coerenti e verificano la condizione di non arbitraggio (del primo tipo) se per ogni scelta dei pesi $a_j \in \Re$, risulta

$$\min_{\omega_i \notin \Omega} \sum_{j=1}^{n} a_j y^j(\omega_i) \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \pi\left(y^j\right).$$

Le variabili aleatorie che si considerano "autorizzate" costituiscono il sottospazio vettoriale M di $\Re^n$, generato da $y^1, y^2, ..., y^n$ ed il prezzo,

$$\pi(y) = \pi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j y^j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \pi\left(y^j\right),$$

risulta un funzionale lineare. La matrice dei pagamenti finali $Y = \left[y^1 \middle| y^2 \middle| ... \middle| y^n\right]$ si ottiene accostando i vettori y^j e l'uguaglianza sui prezzi delle combinazioni lineari si scrive in notazione matriciale $\pi(Ya) = \pi a$.

La condizione di non arbitraggio per i prezzi vale se e solo se esiste un vettore di probabilità $p > 0$ tale che il prezzo di ogni variabile aleatoria ne è il valore atteso

$$\pi(y) = E_y[y] = py$$

per ogni $y \in M$: p è una probabilità neutra rispetto al rischio.

Se l'analisi si sviluppa su più periodi, ed in ogni periodo è possibile un numero finito di esiti, se inoltre non viene persa informazione nel tempo, questa viene rappresentata mediante una filtrazione. Si consideri un orizzonte temporale di T periodi, intervallati dalle date $t = 0,1,2,...,T$. Gli stati del mondo in $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ si sveleranno solo alla data finale: uno ed uno solo di essi si realizza. Il fluire del tempo è descritto da una partizione A_t di Ω, che diventa sempre più fine al crescere di t, in $t = 0$, $A_0 = \{\Omega\}$, in $t = T$, A_T contiene gli stati del mondo isolati.

I pagamenti avvengono in T, ma il prezzo π viene fissato in ogni nodo dell'albero che rappresenta lo sviluppo temporale, cioè in corrispondenza di ogni diversa situazione che risulterà distinguibile alle varie date future.

Da un periodo al successivo il prezzo temporaneo deve essere uguale al valore attuale del valore atteso, questa volta subordinato agli eventi:

- non vi sono opportunità di arbitraggio se e solo se esistono (almeno) una probabilità (>0) ed un fattore di sconto (>) , magari variabile da periodo a periodo, tali che il prezzo, in ogni nodo, sia il valore attuale del valore atteso subordinato dei pagamenti alla data successiva, cioè sul sottoalbero da un nodo, che si sviluppa su un periodo, $\pi_t\left(y|A\right)=E_p\left[y|A\right]$.

Tale proprietà è detta ***martingalità*** del processo dei valori attuali e perciò la probabilità è usualmente detta ***misura equivalente di martingala.***

Se è assegnato l'insieme M delle variabili aleatorie, potranno esistere variabili aleatorie che non cadono in M, secondo la distinzione tra mercato completo e mercato incompleto (per una descrizione dettagliata vedi [6]) a seconda che esistano o meno portafogli in grado di rappresentare qualsiasi combinazione di flussi.

Si aggiunga l'assioma di positività: tra le variabili aleatorie autorizzate ve ne è almeno una strettamente positiva, $M \cap \Re^m_{++} = \emptyset$.

Sia L l'insieme delle soluzioni per $\varphi Y = \pi$, $L_+ = L \cap \Re^m$ l'insieme delle soluzioni ≥ 0, L_{++} l'insieme delle soluzioni strettamente positive. Si useranno le stesse notazioni anche per le probabilità, così ad esempio $P_+ = \left\{p : v\left(p\right) p \in L_+\right\}$.

Le variabili non appartenenti ad M non ricevono un prezzo, per ciascuna di esse si possono però calcolare un massimo ed un minimo prezzo compatibili con l'assenza di opportunità di arbitraggio. Si distinguono allora prezzo di acquisto $F_a\left(y\right) = \sup\limits_{\varphi \in L_{++}} \varphi y$ e prezzo di vendita $F_a\left(y\right) = \inf\limits_{\varphi \in L_{++}} \varphi y$, ma vale ancora la condizione di linearità $F_b\left(y\right) = -F_a\left(-y\right)$ per ogni $y \notin M$. Se il fattore di sconto v è supposto costante, al variare della probabilità $p \in P_+$ sarà

$$F\left(y\right) = v \max_{p \in P_+} py = v \max_{p \in P_+} E_p\left[y\right],$$

ossia il prezzo d'acquisto di ogni variabile aleatoria è il valore attuale del massimo suo valor medio al variare delle probabilità neutre rispetto al rischio.

Prezzo domandato e prezzo offerto non necessariamente coincidono e sul mercato compaiono delle asimmetrie che generano l'intervallo bid-ask. Il prezzo ask è il minimo prezzo domandato per vendere un bene e corrisponde all'idea di assicurazione, come quel processo che riduce il rischio dietro pagamento di un importo di denaro; il prezzo bid rappresenta l'ammontare massimo che un operatore accetta di pagare per accedere al bene. Così vale la condizione di sublinearità,

$$F_b(y)+F_a(-y)\geq 0,$$

in accordo alla quale si riceve più dalla vendita di quanto si paga all'acquisto. L'intervallo bid-ask riflette il costo necessario alla realizzazione dello scambio e l'asimmetria delle informazioni.

I vettori dei prezzi degli stati compatibili con i prezzi sono ora le soluzioni del sistema $\varphi Y \leq \pi$, ossia tutti i vettori φ che conducono a prezzi migliori $L=\{\varphi:\varphi Y\leq\pi\}$ ed analogamente per L_+, L_{++}. Così, se vale l'assioma di positività e non sono possibili arbitraggi, il prezzo rappresenta il minimo costo per variabili aleatorie super-replicabili

$$-\infty < F(y)=\max_{\varphi\in L_+}\varphi y=\min\{\pi(z): z\geq y, z\in M\}$$

E se poi le asimmetrie vengono distribuite nel tempo, per avere un sistema di prezzo che non consente arbitraggi dovrà esistere una probabilità con cui calcolare in ogni nodo dell'albero, il massimo ed il minimo dei valori medi scontati, martingale rispetto all'operatore, rispettivamente $\max E$ e $\min E$.

6.2 Il ruolo dei costi di transazione nei nuovi equilibri

I costi di transazione intervengono a modificare le condizioni di non arbitraggio anche per i derivati come testimoniano studi empirici ([10]).

La presenza dei costi di transazione introduce elementi di rischio e non è più possibile una copertura perfetta, si è invece ricondotti alla minimizzazione del rischio della posizione.

In un mercato perfetto, la teoria degli investimenti assume forme differenti per le obbligazioni e per i titoli azionari da un lato, per i derivati dall'altro.

Il prezzo di un titolo convenzionale è determinato, in equilibrio, dalle sue caratteristiche di rischio-rendimento, mentre i derivati, ridondanti, traggono il loro prezzo dalle strategie di replicazione.

Ciò non è più vero in un mercato incompleto: infatti non è più possibile coprire in modo completo i derivati ed una strategia ottimale richiede la minimizzazione del rischio residuo, dunque, coprire un titolo contingente, diviene equivalente a minimizzare il rischio di un portafoglio che lo contiene ([13]).

Si consideri un mercato ad informazione incompleta e costi di transazione proporzionali.

Sia ϑ_t il numero di unità del titolo rischioso investite in t: il costo totale della strategia ϑ_t, dipende dal numero di unità acquistate L_t, vendute Q_t,

$$C_t(\vartheta) = \int_0^T k_t (dL_t + dQ_t)$$

essendo k_t il costo per unità scambiata, ad esempio $k_t = kX_t$, in caso di costi proporzionali. Il valore di mercato del portafoglio al tempo t sarà dato dal capitale iniziale c, più il guadagno dal trading $G_t(\vartheta)$, diminuito dei costi di transazione,

$$V_t^c(\vartheta) = c + G_t(\vartheta) - C_t(\vartheta)$$

con $G_t(\vartheta) = \int_0^t \vartheta_s dX_s$. Alla data finale T il payoff dal pagamento della passività $H = (H_X, H_B)$ con H_X unità di titolo rischioso ed H_B unità di numerario, e dalla liquidazione del portafoglio rimanente sarà

$$V_T^c(\vartheta) - k_t |\vartheta_T - H_X| - X_T H_X - H_B,$$

che andrà valutato in base alle preferenze dell'agente. Introdotto un funzionale di rischio $\rho : L^p \to \Re$ che verifichi le seguenti condizioni:

- è convesso
- se $X \leq Y$ quasi ovunque, allora $\rho(X) \geq \rho(Y)$ e ρ è decrescente
- ρ ha la proprietà di Fatou, ossia, se $X_n \to X$ quasi ovunque, allora risulta $\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$.

Si osservi che tale classe di funzionali include:

- la misura shortfall $\rho(X) = E\left[X^-\right]$,
- le misure coerenti, $\rho(X) = \sup_{p\in\Pi} E_p[-X]$, con Π insieme di probabilità,
- la massimizzazione dell'utilità attesa $\rho(X) = -E[U(X)]$.

Definito $H(\vartheta) = k_T |\vartheta_T - H_X| + X_T H_X + H_B$, se ρ è un funzionale convesso decrescente e >0, allora il problema di minimo

$$\min_{\vartheta} \rho\left(V_T^c(\vartheta) - H(\vartheta)\right)$$

ha soluzione nell'insieme ammissibile delle strategie con costi a variazione finita e momento p-mo del guadagno limitato,

$$\Theta_{C,M}^{p} = \left\{ \vartheta : \vartheta \ prevedibile, C_T(\vartheta) \in L^p, \left\| G_T(\vartheta) \right\|_p \le M \right\}.$$

7 Conclusioni

Nel passaggio dalla matematica finanziaria classica alla finanza matematica vengono prese in esame operazioni finanziarie innovative in un'ottica completamente diversa.

Ma ciò che questa nota ha voluto soprattutto enfatizzare è che tale passaggio è stato stimolo per lo sviluppo di numerosi filoni di ricerca. Si è infatti realizzata una fattiva collaborazione tra matematici, probabilisti e studiosi di finanza per dare ai modelli una formalizzazione sempre più adeguata a rappresentare il comportamento degli operatori ed il funzionamento dei mercati.

Si sono in particolare esaminati lo sviluppo della quantificazione e misurazione del rischio e la ridefinizione di condizioni di equilibrio in presenza di incompletezza, asimmetrie ed altre imperfezioni del mercato.

Bibliografia

1. Albota, M., Chen, L., Fan, A., Freyfogle, E., Grover, J., Schouenaars, T., Sun, W.: Optimal rebalancing strategy for pension plans. A presentation to State Street Associates, Financial Engineering proseminar. MIT Sloan School of Management (november 18, 2004)
2. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D.: Coherent risk measures. Mathematical Finance **9** (1999) 203-228
3 Back, K.: Continuous trading with asymmetric and imperfect competion, in [9]
4 Bensoussan, A., Hurst, E.G., Naslund, B.: Management applications of modern control theory. North Holland (1974)
5 Black, F., Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy **81** (1973) 637-654
6 Castagnoli, E., Favero, G., Maccheroni, F.: Marchetto: Il prezzatore perfetto. Preprint (May 2005)
7 Chateneuf, H.C., Kast, R., Lapied, A.: Choquet pricing for financial markets with frictions. Mathematical Finance **6** (1996) 323-330
8 Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W.: Copula methods in finance, J. Wiley (2004)

9 Davis, M.H.A., Duffie, D., Fleming, W.H., Shreve, S.E.: Mathematical finance. Springer Verlag (1995)
10 Davis, M.H.A., Panas, V.G., Zariphopoulou, T.: European option pricing with transaction costs. SIAM J. Control and Optimization **31** (1993) 470-493
11 Denault, M.: Coherent allocation of risk capital. Technical report, Ecole des H.E.C., Montreal (2001)
12 Fama, E.F.: Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. The Journal of Finance **25** (1970) 383-417
13 Guasoni, P.: Risk minimization under transaction costs. Finance and Stochastics **6** (2002) 91-113
14 Hennessy, D.A., Lapan, H.E.: The use of copulas to model portfolio allocations. Mathematical Finance **12** (2002) 143-154
15 Korn, R.: Portfolio optimization with strictly positive transaction costs and impulse control. Finance and Stochastics **2** (1998) 85-114
16 Markowitz, H.: Portfolio selection: efficient diverification of investments, J.Wiley (1959)
17 Mazzoleni, P.: Portfolio problems with marketing costs. Technical report, Università Ca' Foscari di Venezia (April 1979)
18 Mazzoleni, P.: Risk measures and return performance: a critical approach. European Journal of Operational Research **155** (2004) 268-275
19 Merton, R.C.: Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. Review of Economics and Statistics **51** (1969) 247-257
20 Rachev, S.T.: Handbook of heavy tailed distributions in finance. Elsevier (2003)
21 Sharpe, W.F.: A simplified model for portfolio analysis. Management Science **1** (1963) 277-293
22 Wang, T.: A class of dynamic risk measures. Working paper, University of British Columbia (September 1999)
23 Yaari, M.E.: The dual theory of choice under risk. Econometrica **55** (1987) 95-115